定数係数の分散型方程式に対する時間大域的平滑化効果(調和解析と非線形偏微分方程式)

森井, 慶

数理解析研究所講究録
1491 巻 2006 年 36-45

定数係数の分散型方程式に対する時間大域的平滑化効果

森井 慶 (Kei Morii)

東北大学大学院理学研究科数学専攻 (Mathematical Institute, Tohoku University) *

1 序

定数係数微分方程式の初期値問題

$$D_t u - a(D)u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^{1+n}, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x) \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

を考える. ここで $u(t,x)$ は $(t,x) = (t,x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{1+n}$ の複素数値未知函数, $n \geqslant 1$ であり,

$$D_t = -i\frac{\partial}{\partial t},\ D = (D_1,\ldots,D_n),\ D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},$$

ここで i は虚数単位である. ここに, $a(D)$ は

$$a(D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}a(\xi)u(y)dyd\xi$$

により定義される微分作用素である. 本稿を通して, 表象 $a(\xi) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ は実数値函数であり遠方で高々多項式程度の増大度を持つと仮定する. 初期値問題 (1.1)–(1.2) の解は

$$e^{ita(D)}\phi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi+ita(\xi)}\phi(y)dyd\xi$$

により与えられる.

分散型方程式の平滑化効果はこの 20 年程に多数の研究がなされている. まず Sjölin [7] が $a(\xi) = |\xi|^m$, $m > 1$ の場合に局所評価を示した. 斉次方程式に対する時間大域的 L^2 評価に絞ろう. $-a(D)$ が Laplacian $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$, 即ち $a(\xi) = |\xi|^2$ である場合の平滑化効果が示された後に, より一般的な実数値表象 a に対する同様の結果が得られている. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9], [10], [11] 及びそれらの参考文献を参照されたい. ここで函数空間の記号を導入する. Ω を Euclid 空間の部分

*The author is supported by JSPS Research Fellowship for Young Scientists.

集合とする. $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $C^s(\Omega)$ は Ω 上 s 階連続的微分可能実数値函数の集合を表す. $L^2(\Omega)$ は Ω 上自乗可積分函数の集合を表し,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

とおく. 多数の仕事があるが, 斉次実数値表象 a に対する時間大域的 L^2 評価の一つのタイプは次のようにまとめられている. $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ とおく.

定理 1.1 (Chihara [2, Theorem 1.1]). $n \geqslant 1$ とする. $a \in C^1(\mathbb{R}^n)$ は $m > 1$ 次斉次であり, 分散型の条件

$$任意の \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} に対して, \nabla a(\xi) \neq 0$$

を満たすと仮定する. $\delta > 1/2$ とする. このとき, $C > 0$ が存在して, 任意の $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|\langle x \rangle^{-\delta} |D|^{(m-1)/2} e^{ita(D)} \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

である.

初期値問題の解 $e^{ita(D)}\phi$ は初期データ ϕ より空間局所的, 時間大域的に $(m-1)/2$ 階滑らかさが増す事を表している. 他のタイプは $\langle x \rangle^{-\delta}|D|^{(m-1)/2}$ の部分が異なるものである. 大雑把に言えば, 局所的平滑化効果は分散型の条件によって引き起こされる. それは古典軌道の nontrapping 条件と同値である. 即ち, 任意の $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して,

$$|X(t; x, \xi)| = |x + t\nabla a(\xi)| \to \infty \text{ as } t \to \pm\infty$$

である.

この種の局所的平滑化効果を得る為には分散型の条件が必要である事が最近証明された.

定理 1.2 (Hoshiro [4, Theorem 1.1]). $a(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \xi^\alpha$ を $m > 1$ 次実多項式とする. $a_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha$ を主表象とする. $U \subset \mathbb{R}^n$ を空でない有界開集合とし, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をコンパクトな台を持つ函数で $x \in U$ に対して $\chi(x) = 1$ であるものとする. $C > 0$ 及び $T > 0$ が存在して, 任意の $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\int_0^T \|\langle D \rangle^{(m-1)/2} \chi e^{ita(D)} \phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を満たすと仮定する. このとき, 主部に対する分散型の条件

$$任意の \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} に対して, \nabla a_m(\xi) \neq 0$$

が成立する.

これまでは主に a が斉次函数又は多項式である場合が考えられてきたが, 本稿では a が斉次とは限らず, 低階項のある場合を含めて統合的に扱う. $a_m(\xi)$ を $a(\xi)$ の主表象とする. 定理 1.1 では任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対する $\nabla a_m(\xi) \neq 0$ が仮定されていたが, 我々は低階項の存在を許し, 全表象に対する分散型条件を仮定する.

主結果の一つは以下である. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ とおく.

定理 1.3. $n \geqslant 1$ とする. 以下を仮定する.

(A1) $a \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

(A2) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して, $\nabla a(\xi) \neq 0$.

(A3) $m > 1$ 及び $a_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$ が存在して, 以下を満たす.

(i) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して, $\nabla a_m(\xi) \neq 0$.

(ii) 任意の $\lambda > 0$ 及び $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して, $a_m(\lambda\xi) = \lambda^m a_m(\xi)$.

(iii)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \max_{\omega \in S^{n-1}} |\lambda^{-m+1} \nabla a(\lambda\omega) - \nabla a_m(\omega)| = 0.$$

(iv) 連続函数 $a_0 \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ が存在して,

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \max_{\omega \in S^{n-1}} \left| \frac{\nabla a(\lambda\omega)}{|\nabla a(\lambda\omega)|} - a_0(\omega) \right| = 0.$$

$\delta > 1/2$ とする. このとき, $C > 0$ が存在して, 任意の $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\| \langle x \rangle^{-\delta} |(\nabla a)(D)|^{1/2} e^{ita(D)} \phi \|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

である.

この定理から, 低階項が存在しても他に適当な条件を満たせば, 低階項が邪魔をせずに平滑化効果が得られる事がわかる. 即ち, 低階項が主部に吸収される為の十分条件を与えている. 例えば,

$$a(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^4 + |\xi|^2$$

を考える. これは定理 1.3 の仮定を満たす例であり, $a(D)$ は実主要型の作用素である.

それに対して, 主表象に対する分散型条件が破綻している場合では, 以下の定理のように表象が各座標成分毎の 1 変数函数の和で表される場合には議論が上手く進む.

定理 1.4. $n \geqslant 2$ とする.

$$a(\xi) = g(h(\xi)),\ h(\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\xi_j)$$

とおく. ここで $g \in C^1(\mathbb{R})$ は遠方で高々多項式程度の増大度を持ち, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $g'(h(\xi)) \neq 0$ であり, 全ての $j = 1, \dots, n$ に対して, $a_j \in C^1(\mathbb{R})$ は遠方で高々多項式程度の増大度を持ち, $|a_j'(\rho)|$ は $(-\infty, 0)$ 上非増加且つ $(0, \infty)$ 上非減少, 且つ $a_j'(\rho) = 0 \iff \rho = 0$ であると仮定する. $\delta > 1/2$ とする. このとき, $C > 0$ が存在して, 任意の $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\| \langle x \rangle^{-\delta} |(\nabla a)(D)|^{1/2} e^{ita(D)} \phi \|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

である.

この定理から, 適当な条件を満たせば, 実主要型でない作用素に対する平滑化効果が得られる事がわかる. 例えば, $n \geqslant 2$ とし,

$$a(\xi)=\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^4+|\xi|^2$$

を考える. これは定理 1.4 の仮定を満たす例であるが, 定理 1.3 の仮定 (A2) を満たさない. 主部 $\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^4$ に加えて低階項 ξ_n^2 が支えて平滑化効果を生み出していると言える.

証明の概略を述べる. $(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}$ に関する Fourier 変換を

$$\tilde{f}(\tau,\xi)=(2\pi)^{-(1+n)/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x)e^{-it\tau-ix\cdot\xi}dtdx$$

と定める. 一般に, 時間大域的平滑化評価

$$\|\langle x\rangle^{-\delta}|(\nabla a)(D)|^{1/2}e^{ita(D)}\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}\leqslant C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

は双対性により Fourier 制限不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla a(\xi)|\,|\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \tag{1.3}$$

と同値である. 以下, 我々は (1.3) 式を示す事を目標とする. 斉次な表象に対して, Chihara [2] での方法は, ∇a が消えない方向に着目して左辺の積分領域 $\mathbb{R}^n$ を有限個の連結な錐領域に分解する. 我々は表象が斉次とは限らないから, 定理 1.4 では曲がった領域に分解する. 又, 定理 1.3 では, ξ の高周波数帯においては $a(\xi)$ は斉次函数に近似できるので, [2] でのものと同様な錐領域に分解できる.

本稿では, 第 2 節で定理 1.3 の証明を, 第 3 節で定理 1.4 の証明を与える.

2 実主要型作用素の場合

この節では, 定理 1.3 の証明を与える.

注意 2.1. $u(t,x)$ の代わりに $e^{ita(0)}u(t,x)$ を考える事により $a(0)=0$ として一般性を失わない.

$R>0$ に対して, $B_R=\{x\in\mathbb{R}^n;\,|x|<R\}$, $\overline{B}_R=\{x\in\mathbb{R}^n;\,|x|\leqslant R\}$ とおく.

補題 2.2. $n\geqslant 2$ とする. (A1)-(A3) を仮定する. $j=1,\ldots,n$ に対して,

$$\Gamma_j=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\};\,\left|\frac{\partial a_m}{\partial\xi_j}(\xi)\right|>(2n)^{-1/2}|\nabla a_m(\xi)|\right\}$$

とおく. このとき, $R>1$ が存在して, $\xi\in\Gamma_j\setminus B_{R-1}$ に対して,

$$\left|\frac{\partial a}{\partial\xi_j}(\xi)\right|\geqslant C|\nabla a(\xi)|$$

である.

(A3) (i) から, $n \geqslant 2$ のとき,

$$\bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{2.1}$$

が従う事に注意する.

補題 2.2 の証明. (A3) (iii) により, $R > 1$ が存在して, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R-1}$ に対して,

$$\frac{|\nabla a(\xi) - \nabla a_m(\xi)|}{|\xi|^{m-1}} \leqslant \frac{(2n)^{-1/2}}{10} \min_{\omega \in S^{n-1}} |\nabla a_m(\omega)|$$

である. このとき,

$$\begin{aligned}
|\nabla a(\xi)| &\leqslant |\nabla a_m(\xi)| + \frac{(2n)^{-1/2}|\xi|^{m-1}}{10} \min_{\omega \in S^{n-1}} |\nabla a_m(\omega)| \\
&= |\nabla a_m(\xi)| + \frac{(2n)^{-1/2}}{10} \min_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\nabla a_m(\xi)| \\
&\leqslant \frac{11}{10} |\nabla a_m(\xi)|
\end{aligned}$$

である. これを用いれば, $\xi \in \Gamma_j \setminus B_{R-1}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(\xi) \right| &\geqslant \left| \frac{\partial a_m}{\partial \xi_j}(\xi) \right| - \frac{(2n)^{-1/2}|\xi|^{m-1}}{10} \min_{\omega \in S^{n-1}} |\nabla a_m(\omega)| \\
&\geqslant (2n)^{-1/2} |\nabla a_m(\xi)| - \frac{(2n)^{-1/2}}{10} \min_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\nabla a_m(\xi)| \\
&\geqslant \frac{9(2n)^{-1/2}}{10} |\nabla a_m(\xi)| \\
&\geqslant \frac{9(2n)^{-1/2}}{11} |\nabla a(\xi)|
\end{aligned}$$

を得る. これで証明が完了する. □

次の補題により ξ の低周波数帯, 中周波数帯及び高周波数帯を, その上で a の特定の方向微分が消えないような有限個の連結な凸領域に分解する.

補題 2.3. $n \geqslant 1$ とする. (A1)-(A4) を仮定する. このとき, $l \in \mathbb{N}$, 凸集合 $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 及び $\omega_1, \ldots, \omega_l \in S^{n-1}$ が存在して, 以下を満たす.

(i) $\bigcup_{k=1}^{l} \Lambda_k = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) 任意の $\xi \in \Lambda_k$ に対して, $\nabla a(\xi) \cdot \omega_k \geqslant C|\nabla a(\xi)|$.

証明. (第 1 段) $\omega_0 \in S^{n-1}$ 及び $r > 0$ に対して,

$$\Lambda_{\omega_0, r} = \{\lambda\omega;\, 0 < \lambda < r,\, \omega \in S^{n-1},\, \omega \cdot \omega_0 > 9/10\}$$

とおくと, これは凸且つ開集合である. (A4) により, $a_0(\lambda\omega) = \nabla a(\lambda\omega)/|\nabla a(\lambda\omega)|$ は $[0,1] \times S^{n-1}$ 上の一様連続函数である. 従って, $r \in (0,1]$ が存在して, $\lambda\omega \in \Lambda_{\omega_0, r}$ に対して,

$$|a_0(\lambda\omega) - a_0(r\omega_0/2)| < \frac{1}{10}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} a_0(\lambda\omega)\cdot a_0(r\omega/2) &= |a_0(r\omega/2)|^2 + (a_0(\lambda\omega) - a_0(r\omega/2))\cdot a_0(r\omega/2) \\ &\geqslant 1 - |a_0(\lambda\omega) - a_0(r\omega/2)| \\ &> \frac{9}{10} \end{aligned}$$

である．今，$\eta_{\omega_0} = a_0(r\omega_0/2)$ とおくと，$\lambda\omega \in \Lambda_{\omega_0,r}$ に対して，

$$\nabla a(\lambda\omega)\cdot\eta_{\omega_0} > \frac{9}{10}|\nabla a(\lambda\omega)|$$

である．さて，$\Lambda_{\omega_0,r} \ni r\omega_0/2$ であるから，$\bigcup_{\omega_0\in S^{n-1}}\Lambda_{\omega_0,r} \supset (r/2)S^{n-1} = \{r\omega/2;\,\omega\in S^{n-1}\}$ である．$(r/2)S^{n-1}$ はコンパクト集合であるから，$l\in\mathbb{N}$ 及び $\omega_{0,1},\dots,\omega_{0,l}\in S^{n-1}$ が存在して，$\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_{\omega_{0,k},r} \supset (r/2)S^{n-1}$ となる．$\Lambda_{\omega_{0,k},r}$ は円錐であるから，$\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_{\omega_{0,k},r} = B_r\setminus\{0\}$ である．最後に，$\Lambda_k = \Lambda_{\omega_{0,k},r}$ 且つ $\omega_k = \eta_{\omega_{0,k}}$ とおけば，$\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_k = B_r\setminus\{0\}$ であり，$\xi\in\Lambda_k$ に対して，$\nabla a(\xi)\cdot\omega_k \geqslant C|\nabla a(\xi)|$ である．

(第2段) まず，$n\geqslant 2$ とする．$R>1$ を補題2.2で定められたものとする．$\omega_0\in S^{n-1}$ を任意にとり固定する．(2.1)式により，ある j が存在して，$\omega_0\in\Gamma_j$ である．従って，ω_0 の S^{n-1} における開近傍 $U_{\omega_0}\subset S^{n-1}\cap\Gamma_j$ で錐 $W_{\omega_0} = \{\lambda\omega;\,\lambda>0,\,\omega\in U_{\omega_0}\}\subset\Gamma_j$ が凸集合であるものをとれる．$\bigcup_{\omega_0\in S^{n-1}}U_{\omega_0} = S^{n-1}$ である．S^{n-1} はコンパクト集合であるから，$l\in\mathbb{N}$ 及び $\omega_{0,1},\dots,\omega_{0,l}\in S^{n-1}$ が存在して，$\bigcup_{k=1}^{l}U_{\omega_{0,k}} = S^{n-1}$ となる．このとき，$\bigcup_{k=1}^{l}W_{\omega_{0,k}} = \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ である．必要ならば $W_{\omega_{0,k}}$ を十分細い有限個の錐で覆う事により (再び同じ記号 $\{W_{\omega_{0,k}}\}_{k=1}^{l}$ を用いる)，$W_{\omega_{0,k}}\setminus\overline{B}_R\subset\Lambda_k\subset W_{\omega_{0,k}}\setminus\overline{B}_{R-1}$ なる凸集合 Λ_k をとる事ができる．補題2.2から $\{(\partial a/\partial\xi_j)(\xi);\,\xi\in\Lambda_k\}$ は0を含まない連結集合である事が従う．各 $k=1,\dots,l$ に対して，$(\partial a/\partial\xi_j)(\xi)$ が Λ_k 上で正であれば前に定めた j で $\omega_k = e_j = (0,\dots,0,1_{(j)},0,\dots,0)$，負であれば $\omega_k = -e_j$ とおく．このとき，$\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_k\supset\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_R$ であり，$\xi\in\Lambda_k$ に対して，$\nabla a(\xi)\cdot\omega_k\geqslant C|\nabla a(\xi)|$ である．

次に，$n=1$ とする．(A3) (iii) により，$R>1$ が存在して，$\xi\in(-\infty,-R+1]\cup[R-1,\infty)$ に対して，

$$\frac{|a'(\xi)-a'_m(\xi)|}{|\xi|^{m-1}} \leqslant \frac{1}{10}\min\{|a'_m(1)|,|a'_m(-1)|\}$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} |a'(\xi)| &\geqslant |a'_m(\xi)| - \frac{|\xi|^{m-1}}{10}\min\{|a'_m(1)|,|a'_m(-1)|\} \\ &= |a'_m(\xi)| - \frac{1}{10}\min_{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}|a'_m(\xi)| \\ &\geqslant \frac{9}{10}|a'_m(\xi)| \\ &> 0 \end{aligned}$$

を得る．$\Lambda_1 = (R-1,\infty)$，$\Lambda_2 = (-\infty,-R+1)$ とおく．$\omega_1 = \operatorname{sgn} a'(R)$，$\omega_2 = \operatorname{sgn} a'(-R)$ とおけば，$n\geqslant 2$ の場合と同様の結論を得る事ができる．

(第 3 段) $r \in (0,1]$ を第 1 段で, $R > 1$ を第 2 段で定められたものとする. $\xi \in \overline{B}_R \setminus B_r$ を任意にとり固定する. $\omega_\xi = \nabla a(\xi)/|\nabla a(\xi)|$ とおく. 函数

$$\frac{\nabla a(\zeta + t\omega_\xi)\cdot\omega_\xi}{|\nabla a(\zeta + t\omega_\xi)|}$$

は $(t,\zeta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ に関して, $\zeta + t\omega_\xi = 0$ の除外近傍で連続であり, $(t,\zeta) = (0,\xi)$ のとき値 1 をとるから, $d_1, d_2 > 0$ が存在して, $\zeta + t\omega_\xi \in \Lambda_\xi$ に対して,

$$\nabla a(\zeta + t\omega_\xi)\cdot\omega_\xi \geqslant \frac{1}{2}|\nabla a(\zeta + t\omega_\xi)|$$

である. ここで,

$$\Lambda_\xi = \{\zeta + t\omega_\xi;\ \zeta \in \mathbb{R}^n,\ |\zeta - \xi| < d_1, -d_2 < t < d_2\}$$

であり, これは凸且つ開集合である. さて, $\Lambda_\xi \ni \xi$ であるから, $\bigcup_{\xi\in\overline{B}_R\setminus B_r}\Lambda_\xi \supset \overline{B}_R\setminus B_r$ である. $\overline{B}_R\setminus B_r$ はコンパクト集合であるから, $l \in \mathbb{N}$ 及び $\xi_1,\dots,\xi_l \in \overline{B}_R\setminus B_r$ が存在して, $\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_{\xi_k} \supset \overline{B}_R\setminus B_r$ となる. 最後に, $\Lambda_k = \Lambda_{\xi_k}$ 且つ $\omega_k = \omega_{\xi_k}$ とおけば, $\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_k \supset \overline{B}_R\setminus B_r$ であり, $\xi \in \Lambda_k$ に対して, $\nabla a(\xi)\cdot\omega_k \geqslant (1/2)|\nabla a(\xi)|$ である.

第 1 段–第 3 段を併せて結論が得られる. これで証明が完了する. □

以上の補題を用いて, 定理 1.3 を証明する.

定理 1.3 の証明. まず, (1.3) 式を示す. 補題 2.3 (i) により,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla a(\xi)|\,|\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} &= \left(\int_{\bigcup_{k=1}^{l}\Lambda_k}|\nabla a(\xi)|\,|\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{l}\left(\int_{\Lambda_k}|\nabla a(\xi)|\,|\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \qquad (2.2)\end{aligned}$$

である. 右辺を項別に考える. 直交変換により $\omega_k = e_1 = (1,0,\dots,0)$ として一般性を失わない. $\xi = (\xi_1,\xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ と書く. $Z_k = \{(a(\xi),\xi');\ \xi \in \Lambda_k\}$ とおく. Λ_k は凸であるから, $\xi \in \Lambda_k$ を固定する毎に集合 $\{t \in \mathbb{R};\ te_1 + \xi' \in \Lambda_k\}$ は区間である. 補題 2.3 (ii) により, その区間上で

$$\frac{d}{dt}a(te_1 + \xi') = \frac{\partial a}{\partial \xi_1}(te_1 + \xi') \geqslant C|\nabla(te_1 + \xi')| > 0$$

であるから, $a(te_1 + \xi')$ は t に関して狭義単調増加である. このとき, 写像

$$\Lambda_k \ni \xi \mapsto (\tau,\xi') = (a(\xi),\xi') \in Z_k \qquad (2.3)$$

は全単射である. その逆を

$$Z_k \ni (\tau,\xi') \mapsto (\Xi_k(\tau,\xi'),\xi') \in \Lambda_k$$

により表す. $\xi \in \Lambda_k$ に対して,

$$\left|\det\frac{\partial\xi}{\partial(\tau,\xi')}\right| = \left|\det\frac{\partial(\tau,\xi')}{\partial\xi}\right|^{-1} = \left|\frac{\partial a}{\partial\xi_1}(\xi)\right|^{-1} \leqslant C|\nabla a(\xi)| \qquad (2.4)$$

を得る. (2.3) 式で変数変換し, (2.4) 式, Minkowski の不等式, Plancherel-Perseval の公式及び Schwartz の不等式を順に用いれば,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Lambda_k} |\nabla a(\xi)|\ |\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2 d\xi \\
&= \iint_{Z_k} |\nabla a(\Xi_k(\tau,\xi'),\xi')|\ |\tilde{f}(\tau,\Xi_k(\tau,\xi'),\xi')|^2 \left|\frac{\partial a}{\partial \xi_1}(\Xi_k(\tau,\xi'),\xi')\right|^{-1} d\tau d\xi' \\
&\leqslant C\iint_{Z_k} |\tilde{f}(\tau,\Xi_k(\tau,\xi'),\xi')|^2 d\tau d\xi' \\
&= C\iint_{Z_k} \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\Xi_k(\tau,\xi')}\mathscr{F}_{t,x'}[f](\tau,x_1,\xi')dx_1\right|^2 d\tau d\xi' \\
&\leqslant C\iint_{Z_k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}_{t,x'}[f](\tau,x_1,\xi')|dx_1\right)^2 d\tau d\xi' \\
&\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\iint_{Z_k} |\mathscr{F}_{t,x'}[f](\tau,x_1,\xi')|^2 d\tau d\xi'\right)^{1/2} dx_1\right)^2 \\
&\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\iint_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}_{t,x'}[f](\tau,x_1,\xi')|^2 d\tau d\xi'\right)^{1/2} dx_1\right)^2 \\
&= C\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\iint_{\mathbb{R}^n} |f(t,x)|^2 dtdx'\right)^{1/2} dx_1\right)^2 \\
&\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+x_1^2)^{-\delta/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^n} |\langle x\rangle^{\delta} f(t,x)|^2 dtdx'\right)^{1/2} dx_1\right)^2 \\
&\leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}\int_{-\infty}^{\infty}(1+y^2)^{-\delta}dy \\
&= C\|\langle x\rangle^{\delta} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

を得る. ここで $\mathscr{F}_{t,x'}[f]$ は $(t,x')\in\mathbb{R}^n$ に関する f の Fourier 変換を表す. (2.5) 式を (2.2) 式に代入すれば,

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla a(\xi)|\ |\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \qquad (2.6)
$$

を得る. 最後に, この Fourier 制限不等式から時間大域的平滑化評価が得られる事を示す. Plancherel-Perseval の公式を用い, (2.6) 式を適用すれば,

$$
\begin{aligned}
&\|\langle x\rangle^{-\delta}|(\nabla a)(D)|^{1/2}e^{ita(D)}\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \\
&= \sup_{\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty}(|(\nabla a)(D)|^{1/2}e^{ita(D)}\phi(x))\overline{f(t,x)}dtdx\right| \\
&= \sup_{\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}(\xi)|(\nabla a)(\xi)|^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{e^{-ita(\xi)}\hat{f}(t,\xi)}dtd\xi\right|
\end{aligned}
$$

$$= (2\pi)^{1/2} \sup_{\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi) |(\nabla a)(\xi)|^{1/2} \overline{\tilde{f}(a(\xi),\xi)} d\xi \right|$$

$$\leqslant (2\pi)^{1/2} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \sup_{\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla a)(\xi)| \, |\tilde{f}(a(\xi),\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

$$\leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}$$

を得る. ここで $\hat{\phi}$ は $x \in \mathbb{R}^n$ に関する ϕ の Fourier 変換を表す.

これで証明が完了する. □

3 実主要型作用素とは限らない場合

この節では, 定理 1.4 の証明を与える.

定理 1.4 の証明. $n \geqslant 2$ とする. $a(\xi)$ の定義から

$$\text{任意の}\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ \text{に対して,}\ \nabla a(\xi) = g'(h(\xi))(a_1'(\xi), \ldots, a_n'(\xi)) \neq 0 \tag{3.1}$$

である事が従う.

$$\Gamma_j = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};\ \left| \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(\xi) \right| > (n+1)^{-1/2} |\nabla a(\xi)| \right\}$$
$$= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};\ |a_j'(\xi_j)| > n^{-1/2} \left(\sum_{l \neq j} (a_l'(\xi_l))^2 \right)^{1/2} \right\}$$

とおき, 更に

$$\Gamma_{j,1} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};\ |a_j'(\xi_j)| > n^{-1/2} \left(\sum_{l \neq j} (a_l'(\xi_l))^2 \right)^{1/2},\ \xi_j > 0 \right\},$$
$$\Gamma_{j,2} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};\ |a_j'(\xi_j)| > n^{-1/2} \left(\sum_{l \neq j} (a_l'(\xi_l))^2 \right)^{1/2},\ \xi_j < 0 \right\}$$

と分解する. 仮定から $\Gamma_j = \Gamma_{j,1} \cup \Gamma_{j,2}$ が従う. このとき, (3.1) 式により, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \bigcup_{j,k} \Gamma_{j,k}$ である. 各集合が連結又は空である事を主張する. $\Gamma_{1,1}$ が空でなければ連結である事のみを示す. 他の集合に対しても同様に議論できる. $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ と書く. ξ 及び η を $\Gamma_{1,1}$ 内の任意の点とする. 写像 Ψ: $[0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を

$$\Psi(\theta) = \begin{cases} (\xi_1, (1-3\theta)\xi') & \text{if } 0 \leqslant \theta \leqslant 1/3, \\ ((2-3\theta)\xi_1 + (3\theta-1)\eta_1, 0) & \text{if } 1/3 \leqslant \theta \leqslant 2/3, \\ (\eta_1, (3\theta-2)\eta') & \text{if } 2/3 \leqslant \theta \leqslant 1 \end{cases}$$

により定義する. Ψ が連続であり $[0,1]$ を $\Gamma_{1,1}$ に写している事を見るのは容易である. 従って, $\Gamma_{1,1}$ は $\mathbb{R}^n$ において弧状連結, 従って連結である. 更に, 任意の $\xi \in \Gamma_{1,1}$

に対して, 集合

$$\{t \in \mathbb{R};\ te_1 + \xi \in \Gamma_{1,1}\} = \left\{ t > -\xi_1;\ |a_1'(t+\xi_1)| > n^{-1/2} \left(\sum_{l \neq 1} (a_l'(\xi_l))^2 \right)^{1/2} \right\}$$

は連結である.

以後, 定理 1.3 の証明と同様にして定理 1.4 の証明が得られる. 詳細は省略する. □

謝辞. 本研究にあたりご指導くださった千原浩之先生に感謝の意を表します.

参考文献

[1] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, J. Anal. Math. **58** (1992), 25–37.

[2] H. Chihara, *Smoothing effects of dispersive pseudodifferential equations*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 9-10, 1953–2005.

[3] T. Hoshiro, *Mourre's method and smoothing properties of dispersive equations*, Comm. Math. Phys. **202** (1999), no. 2, 255–265.

[4] T. Hoshiro, *Decay and regularity for dispersive equations with constant coefficients*, J. Anal. Math. **91** (2003), 211–230.

[5] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), no. 4, 481–496.

[6] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A new proof of global smoothing estimates for dispersive equations*, Advances in Pseudo-differential Operators (Basel), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 155, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 65–75.

[7] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 3, 699–715.

[8] M. Sugimoto, *A smoothing property of Schrödinger equations along the sphere*, J. Anal. Math. **89** (2003), 15–30.

[9] B. G. Walther, *Homogeneous estimates for oscillatory integrals*, Acta. Math. Comenian. (N.S.) **69** (2000), 151–171.

[10] B. G. Walther, *Some $L^p(L^\infty)$- and $L^2(L^2)$- estimates for oscillatory Fourier transforms*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 213–231.

[11] K. Watanabe, *Smooth perturbations of the self-adjoint operator $|\Delta|^{\alpha/2}$*, Tokyo J. Math. **14** (1991), no. 1, 239–250.